Домашно №3, Задача 3 по Алгебра 2 на Компютърни Науки

Камен Димитров Младенов, Група 6

31 Май 2023

Решение

Ще докажем, че $p(x)$ е неразложим (над $\mathbb{Q}$). $\gcd(1,-3,6,2) = \pm 1 \implies f(x)$ е примитивен, то тогава той е разложим над $\mathbb{Q} \iff$ е разложим над $\mathbb{Z}$. Разлгеждаме съществено разлагане $f(x) = f_1(x)f_2(x) \quad f_1, f_2 \in \mathbb{Z}[x]$:

$3 = \deg(f) = \deg(f_1) + \deg(f_2), \quad 0 < \deg(f_1), \quad \deg(f_2) < \deg(f)$ Б.О.О. $\deg(f_1) \leq \deg(f_2)$

Тогава $\deg(f_1) = 1, \deg(f_2) = 2 \quad f_1(x) = x - r,\ r \in \mathbb{Z} \quad r$ е делител на свободния член

$\implies r \in \{-2,-1,1,2\}$ Пресмятаме по правилото на Хорнер:

	1	−3	6	2
−2	1	−5	16	−30
−1	1	−4	10	−8
1	1	−2	4	6
2	1	−1	4	10

Следователно f няма рационални корени и е неразложим над $\mathbb{Z}$, тоест е неразложим над $\mathbb{Q}$.

Следователно, $F = \mathbb{Q}[x]/\langle p \rangle$ е поле. От това следва, че $\mathbb{Q}[\alpha]^{\leq 2}$ е поле. Ще намерим λ:

Нека $f(x) = x^2 + x - 1 \in \mathbb{Q}[x]^{\leq 2}, \quad g(x) = x^2 - x - 1 \in \mathbb{Q}[x]^{\leq 2} \implies f(x)g(x) = x^4 - 3x^2 + 1$

$\dfrac{f(x)g(x)}{p(x)} = \dfrac{x^4 - 3x^2 + 1}{x^3 - 3x^2 + 6x + 2} \qquad (x^4 - 3x^2 + 1) - x(x^3 - 3x^2 + 6x + 2) = 3x^3 - 9x^2 - 2x + 1$

$(3x^3 - 9x^2 - 2x + 1) - 3(x^3 - 3x^2 + 6x + 2) = -20x - 5 \quad f(x)g(x) = (x+3)p(x) - 20x - 5$

Понеже $p(\alpha) = 0$, то следва че $\lambda = f(\alpha)g(\alpha) = (\alpha + 3)p(\alpha) - 20\alpha - 5 = -20\alpha - 5$

Сега ще намерим μ:

Нека $h(x) = x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x] \quad$ Ще намерим $u(x), v(x) \in \mathbb{Q}[x]$, такива че

$\gcd(p(x), h(x)) = h(x)u(x) + p(x)v(x)$

$\dfrac{p(x)}{h(x)} = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 6x + 2}{x^2 + x + 1} \qquad (x^3 - 3x^2 + 6x + 2) - x(x^2 + x + 1) = -4x^2 + 5x + 2$

$(-4x^2 + 5x + 2) - (-4)(x^2 + x + 1) = 9x + 6 = r_1 \implies p(x) = (x-4)h(x) + r_1$

$\dfrac{h(x)}{r_1} = \dfrac{x^2 + x + 1}{9x + 6} \qquad (x^2 + x + 1) - \dfrac{1}{9}x(9x + 6) = \dfrac{1}{3}x + 1 \qquad \left(\dfrac{1}{3}x + 1\right) - \dfrac{1}{27}(9x + 6) = \dfrac{7}{9}$

$\implies h(x) = \left(\dfrac{x}{9} + \dfrac{1}{27}\right) r_1 + \dfrac{7}{9} \implies h(x)$ и $p(x)$ са взаимно прости, тоест $\gcd(h(x), p(x)) = 1$

$p(x) = (x-4)h(x) + r_1 \iff r_1 = p(x) + (4-x)h(x) \implies h(x) = \left(\dfrac{x}{9} + \dfrac{1}{27}\right)(p(x) + (4-x)h(x)) + \dfrac{7}{9}$

$\dfrac{9}{7}h(x) = \left(\dfrac{x}{7} + \dfrac{1}{21}\right)(p(x) + (4-x)h(x)) + 1 \qquad 0 = \left(\dfrac{x}{7} + \dfrac{1}{21}\right)p(x) + \left(\dfrac{x}{7} + \dfrac{1}{21}\right)(4-x)h(x) + 1 - \dfrac{9}{7}h(x)$

$-1 = \left(\dfrac{x}{7} + \dfrac{1}{21}\right)p(x) + \left(-\dfrac{x^2}{7} + \dfrac{11x}{21} + \dfrac{4}{21} - \dfrac{9}{7}\right)h(x) \quad 1 = \left(-\dfrac{x}{7} - \dfrac{1}{21}\right)p(x) + \left(\dfrac{x^2}{7} - \dfrac{11x}{21} + \dfrac{23}{21}\right)h(x)$

Заместваме с $\alpha \qquad 1 = \left(\dfrac{\alpha^2}{7} - \dfrac{11\alpha}{21} + \dfrac{23}{21}\right)h(\alpha) \quad 21 = \left(3\alpha^2 - 11\alpha + 23\right)h(\alpha)$

$\implies \mu = \dfrac{21}{h(\alpha)} = 3\alpha^2 - 11\alpha + 23$